

## ● EDUCAÇÃO

# O ESTUDO DO CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DE SUAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

*\*Rafael Winícius da Silva Bueno<sup>1</sup>, Lori Viali<sup>2</sup>*

**RESUMO:** Este trabalho tem por objetivo confrontar e comparar as características emergentes das concepções apoiadas na teoria dos Registros de Representação Semiótica e nas teorias do Sentido do Número, Sentido do Símbolo e Sentido do Gráfico e, a partir de uma reflexão fundamentada, sugerir uma situação-problema que possa contribuir para uma abordagem alternativa para o estudo do conceito de função e suas mais variadas representações. Essa pesquisa possui cunho qualitativo e, mais especificamente, trata-se de um tipo de estudo documental ou bibliográfico, definido como metanálise. Dos estudos realizados emerge a importância do desenvolvimento das habilidades inerentes a cada uma das representações e também da habilidade de transitar entre elas, realizando constantes conversões, como fundamentais para uma construção sólida do conceito. Assim, surge, de forma inconfundível, a necessidade de se trabalhar com os estudantes na construção do sentido dessas representações, buscando o desenvolvimento da capacidade de, através de cada uma delas, perceber o objeto matemático em questão, e não apenas uma representação isoladamente. A partir da investigação realizada, apresenta-se uma situação-problema considerada oportuna para explorar os conceitos de Sentido do Símbolo e Sentido do Gráfico e também a prática da conversão, destacada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

**Palavras-chave:** Ensino e Aprendizagem de Função. Registros de Representação Semiótica. Sentido do Símbolo. Sentido do Gráfico.

## THE STUDY OF THE FUNCTION CONCEPT THROUGH ITS MULTIPLE REPRESENTATIONS

**ABSTRACT:** This paper aims to confront and compare the emergent characteristics from the conceptions based on Theory of the Registers of Semiotic Representation and on the theories of Number Sense, Symbol Sense and Graphic Sense and, from a well-founded reflection, suggests a problem-situation which might contribute to an alternative approach to the study of the function concept and its most diverse representations. This research has qualitative nature and, more specifically, it is a documental or bibliographical study kind, defined as meta-analysis. From the studies made emerge the importance of the development of the inherent abilities of each one of the representations and also the ability to transit among them, doing constant conversions, as fundamental for a solid concept construction. Therefore, arise, unmistakable, the need to work with the students on the construction of these representations' sense, looking for the development of the capacity of, through each one of them, realizing the mathematical object in focus, and not just an isolated representation. From the built investigation, is introduced a problem-situation considered appropriate to explore the Symbol Sense and Graphic Sense concepts as well as the conversion praxis, highlighted on the Theory of the Registers of Semiotic Representation.

**Keywords:** Teaching and Learning of Function. Registers of Semiotic Representation. Symbol Sense. Graphic Sense.

\* Autor correspondente: [rafael.bueno@iffarroupilha.edu.br](mailto:rafael.bueno@iffarroupilha.edu.br)

1 Professor Mestre do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - IFFar, Alegrete, RS, Brasil.  
[rafael.bueno@iffarroupilha.edu.br](mailto:rafael.bueno@iffarroupilha.edu.br)

2 Professor Dr. da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS, Porto Alegre, RS, Brasil. [viali@pucrs.br](mailto:viali@pucrs.br)

## INTRODUÇÃO

O ensino e aprendizagem dos conceitos referentes ao estudo de funções é uma questão recorrente nas discussões acerca da Educação Matemática, pois o contexto mais comum faz uso prioritariamente de métodos repetidos e repetitivos, preocupados apenas com a competência formal, visando, somente, a transmitir o conteúdo, sem contribuição significativa para a construção do pensamento funcional (BRAGA, 2006). Sobre o estilo ainda soberano de aulas de Matemática, conforme D'Ambrósio (1997, p. 72),

[...] carteiras cartesianamente dispostas, professores na frente, quadro-negro como foco único de curiosidade e de atenção intelectual. O material de ensino é composto por livros e cadernos padronizados, listas de chamada organizadas por critérios rígidos, testes, tarefa, elogios e críticas públicas, notas com prêmios ou punições, e outras características mais. Aluno feliz que faz o que gosta e quer, rende muito. Mas o resultado é praticamente o mesmo, em todos os níveis de escolaridade e em todas as disciplinas: o aluno é massacrado no seu comportamento, agredido na sua inteligência e tolhido na sua criatividade.

Nesse sentido, é inequívoco diferir diametralmente da prática comum e pensar que o processo de construção do conhecimento deve se basear na discussão, na criação de conjecturas por parte dos alunos, na argumentação, na contra argumentação, para finalmente se chegar à formalização de novos conceitos. A partir dessa reflexão, constrói-se então uma questão importante: “Será que há alternativa para o ensino e aprendizagem de funções?”

Abrantes et al. (1999, p. 108) consideram que “compreender o que é uma função implica ter experiência de lidar com diversas formas de representação (tabelas, gráficos, regras verbais, expressões algébricas ou outras) e entender as facetas que este conceito pode apresentar”. Concordando com esses autores, entende-se que uma aprendizagem efetiva do conceito de função envolve, decisivamente, o desenvolvimento da capacidade de transitar naturalmente pelas suas mais variadas representações.

Dessa forma, a pesquisa aqui exposta, resultado da dissertação de mestrado do primeiro autor, denominada metodologicamente de metanálise, foi conduzida por meio de uma investigação teórica acerca de abordagens relativas à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval, e às teorias do Sentido do Número, Sentido do Símbolo e Sentido do Gráfico, provenientes de pesquisadores do grupo de estudos envolvendo a Psicologia da Educação Matemática. O objetivo desse trabalho é confrontar e comparar as características emergentes das concepções apoiadas nas duas vertentes e, a partir de uma reflexão fundamentada, sugerir uma situação-problema que contribua para uma abordagem alternativa para o ensino e aprendizagem do conceito de função e suas mais variadas representações.

Este trabalho foi dividido, portanto, em seções. Nesta seção inicial, procura-se trazer a contextualização das razões e motivações que levaram a essa pesquisa e, na sequência, são trazidos os pressupostos teóricos investigados, contemplando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e as concepções sobre Sentido do Número, Sentido do Símbolo e Sentido do Gráfico, buscando relacioná-las, especificamente, à construção do conceito de função e suas representações. Na segunda seção, denominada de Materiais e Métodos, é discutida a metodologia empregada. Na seção três, são destacados resultados e discussões construídos a partir das investigações realizadas e do confronto das principais ideias abordadas. Para finalizar, é trazida uma sugestão de situação-problema que se entende ser capaz de proporcionar oportunidades para serem exploradas as teorias pesquisadas, dentro de um ambiente de ensino e aprendizagem de Matemática.

### Registros de representação semiótica

No estudo dos mais diversos campos da Matemática há a necessidade de se trabalhar com variadas representações, com vistas a uma melhor visualização do objeto de estudo e, conseqüentemente, de uma comunicação mais efetiva. Esta característica se faz presente, de maneira muito evidente, ao se trabalhar com funções, uma vez que se pode representar uma função algébrica ou graficamente, bem como através de tabelas e diagramas.

Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, desenvolveu extensa pesquisa na área de Educação Matemática, enfocando as diversas representações mobilizadas na visualização de objetos matemáticos. Buscou a construção de um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, a partir da mudança de registros de representação semiótica. Duval (2006) caracteriza representações como símbolos e suas associações complexas, que são produzidas de acordo com determinadas regras e que permitem a descrição de um sistema, um processo, um fenômeno, um objeto de conhecimento.

Segundo Duval (1999, p. 4), a utilização de registros de representação semiótica na construção do conhecimento matemático é fundamental, pois,

[...] diferentemente de outros campos do conhecimento (botânica, geologia, astronomia, física), não há outras maneiras de se obter acesso aos objetos matemáticos a não ser através da produção de registros de representação semiótica. Em outros campos de conhecimento, representações semióticas são imagens ou descrições de fenômenos do mundo real aos quais podemos ter acesso perceptual e instrumental sem a utilização dessas representações. Em Matemática esse não é o caso.

Gráficos, tabelas, diagramas, notações simbólicas, expressões algébricas, são, costumeiramente, utilizados para representar objetos, conteúdos, conceitos mate-

máticos. Porém, apesar de a representação semiótica ser condição fundamental para se obter acesso ao pensamento matemático, não se deve confundir os objetos matemáticos com a representação utilizada. O objeto matemático é o representado, é abstrato, enquanto sua representação é o representante, ou seja, o que é utilizado em seu lugar.

Sobre esse paradoxo cognitivo do pensamento matemático, envolvendo o acesso a objetos matemáticos a serem conceitualizados e suas representações, D'Amore (2005, p. 52) afirma que,

[...] de um lado, o estudante não sabe que está aprendendo signos que estão no lugar de conceitos e que deveria estar aprendendo conceitos; de outro lado, se o professor nunca refletiu sobre o assunto, acreditará que o estudante está aprendendo conceitos, enquanto ele está, na realidade, "aprendendo" apenas a utilizar signos.

Nesse sentido, de acordo com Elia e Spyrou (2006), ao se trabalhar com funções, a distinção entre essas e as representações utilizadas para descrever suas leis é uma das condições essenciais para a compreensão do seu conceito. Os autores também afirmam que a compreensão do conceito de função não é uma tarefa fácil, dada a diversidade de representações utilizadas e as dificuldades encontradas pelos estudantes em fazer conexões entre elas, seja pela deficiência na utilização de representações distintas, causada muitas vezes pela concentração do trabalho docente na representação algébrica, seja pela inabilidade de coordenação entre representações.

Conforme Duval (2003), considerando que o objetivo do ensino de Matemática no nível médio e, até mesmo, no que diz respeito às disciplinas de formação inicial de Cálculo Diferencial e Integral, não é formar matemáticos pesquisadores, mas contribuir para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, de análise e de visualização do aluno, faz-se necessária uma abordagem cognitiva no ensino dessa ciência. O desenvolvimento dessas capacidades acaba por construir as ferramentas necessárias para uma compreensão dos conteúdos estudados.

O autor afirma que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ou na possibilidade de trocar, a todo o momento, de registro. Para que ocorra essa mobilização, há a necessidade da transformação de uma representação em outra. Essa transformação se caracteriza pela mudança na forma pela qual o conhecimento é representado. Segundo Duval (2006, p. 107),

O papel dos sistemas de representação semiótica não é apenas designar ou comunicar objetos matemáticos, mas também trabalhar em objetos matemáticos e com eles. Nenhum tipo de processo matemático pode ser utilizado sem o uso de um sistema de representação semiótica, pois o processo matemático

sempre envolve a substituição de uma representação semiótica por outra. O papel dos símbolos em matemática não é ser substituto de objetos, mas de outros símbolos! O importante não é a representação, mas a sua transformação.

Nesse contexto, existem dois tipos de transformações que se distinguem radicalmente: o tratamento e a conversão.

Caracteriza-se como tratamento a transformação de uma representação semiótica em outra, sem que, com isso, se saia de um mesmo registro. Ou seja, o tratamento é uma transformação interna ao registro. Como exemplo, tem-se o caso de encontrar os zeros de uma função utilizando-se apenas manipulações algébricas. Obtém-se o resultado esperado através da transformação da expressão algébrica da função dentro de um mesmo sistema de representação, conforme a Figura 1:

**Figura 1.** Transformação por tratamento

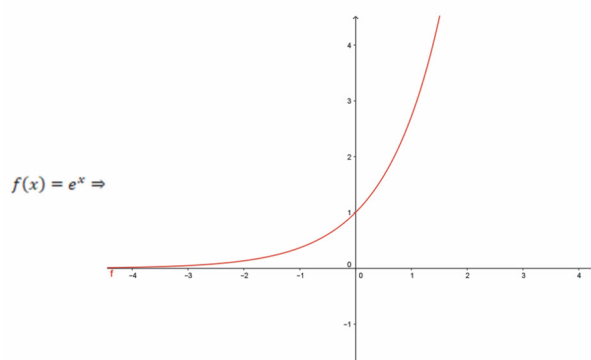
$$f(x) = x^2 - 9 \Rightarrow f(x) = (x + 3)(x - 3)$$

Se  $f(x) = 0$  então  $(x + 3)(x - 3) = 0$ , logo  $x_1 = 3$  e  $x_2 = -3$

**Fonte:** BUENO, R. W. S.; VIALI, L. (2019)

A conversão, por sua vez, é a transformação de uma representação semiótica em outra, na qual ocorre mudança de registro, mas se conserva o objeto denotado. Um caso de conversão, ilustrado na figura 2, é a transformação de uma função de sua representação algébrica para a representação gráfica:

**Figura 2.** Transformação por conversão



**Fonte:** BUENO, R. W. S.; VIALI, L. (2019)

A conversão é, conforme Duval (2003), uma transformação mais complexa que o tratamento, pois a mudança de registros prevê a capacidade de reconhecimento do mesmo objeto em duas representações, cujas visualizações são distintas, e de explicar as propriedades e os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Há na atividade de conversão, de acordo com Duval (2006), dois tipos de fenômenos que podem ser observados: as variações de congruência e de não congruência e a heterogeneidade nos sentidos de conversão.

Nos casos nos quais a conversão se assemelha a uma simples codificação, pois a representação final, no registro de chegada, transparece na representação inicial, no registro de saída, caracteriza-se uma congruência. Já, se a representação final não transparece a inicial, caracteriza-se a não congruência.

O fenômeno da heterogeneidade no sentido da conversão aborda o fato de que nem sempre a conversão acontece quando se inverte a ordem dos registros. No estudo das funções, a construção de gráficos a partir da lei de formação da função ocorre naturalmente, enquanto que a definição da forma algébrica de uma função dada graficamente, em geral, não acontece com a mesma espontaneidade. Conforme Duval (2003, p. 20)

Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses não são os casos mais frequentes.

A partir dessa análise, fica caracterizada a diferença entre os dois tipos de transformação. Enquanto o tratamento ocorre internamente ao registro, a conversão ocorre entre diferentes registros de representação. Nesse sentido, D'Amore (2005, p. 62, grifo do autor) afirma que:

A construção do conhecimento matemático depende fortemente da capacidade de utilizar vários registros de representação semiótica dos referidos conceitos: representando-os em um dado registro; tratando tais representações no interior de um mesmo registro; fazendo a conversão de um dado registro para outro.

Duval (2003) afirma que, no estudo da Matemática, diferentemente de outras ciências baseadas na experimentação e observação, é essencial que o aluno aprenda a reconhecer um objeto de estudo através de múltiplas representações que, por sua vez, podem ser feitas em diferentes registros de representação. O autor afirma que a utilização de ao menos dois registros de representação simultaneamente é a única possibilidade para não se confundir o objeto de estudo com o conteúdo de uma representação. Ressalta, também, que o desenvolvimento dessa habilidade é fundamental para que o aluno possa, de forma independente, transferir ou modificar formulações e representações de informações durante a resolução de um problema.

Assim, de acordo com Duval (2003), surge como enganadora a ideia de que existe uma oposição entre a compreensão conceitual ou mental e as representações semióticas, caracterizadas como externas. Muitas vezes, a compreensão puramente mental nada mais é que a interiorização de uma representação semiótica.

Conforme Elia e Spyrou (2006), caso a capacidade de trabalhar com as transformações de representações

entre diferentes registros não seja construída, evidencia-se um fenômeno denominado compartimentalização, que se caracteriza pela dificuldade cognitiva que surge com a necessidade de conversões em situações matemáticas mais sofisticadas. Nesse sentido, os registros de representação ficam compartimentalizados, enquanto o pensamento matemático permanece fragmentado. Segundo os autores, os estudantes, nesse caso, provavelmente consideram os diferentes registros de representação como objetos matemáticos diferentes e autônomos e não como formas diferentes de representar uma mesma função.

## Psicologia da educação matemática

Outra vertente de trabalhos que envolvem representações de objetos matemáticos é formada por pesquisadores que têm apresentado resultados de investigações relacionadas ao Sentido do Número, Sentido do Símbolo e Sentido do Gráfico, em encontros do grupo de Psicologia da Educação Matemática (Psychology of Mathematics Education), PME, que surgiu em 1976, na cidade de Karlsruhe, na Alemanha, durante o III International Congress on Mathematics Education (ICME), a partir de uma dissidência dentro desse que era, até então, o grupo de maior destaque em Educação Matemática. O objetivo desses novos pesquisadores era incentivar a pesquisa em Educação Matemática através de interações e cooperações entre psicólogos, matemáticos e educadores matemáticos.

Nesse contexto, a Psicologia da Educação Matemática surge como uma vertente de pesquisa, reflexão teórica e aplicação prática, que possui, como cerne, a análise da atividade matemática e, como objetivo principal, o oferecimento de subsídios psicológicos para discussões envolvendo a Educação Matemática. As contribuições provenientes de suas pesquisas se distinguem, principalmente, em três aspectos: a preocupação com a atividade mental do estudante real, inserido em um contexto peculiar, que percorrerá as diversas etapas de aprendizagem; a preocupação com a conceitualização em Matemática; e o compromisso com a construção do conhecimento científico. (FALCÃO, 2003).

## Sentido do Número

Na construção do conhecimento matemático, é inconfundível a importância do papel da representação numérica. Nessa perspectiva, surge a ideia, no final da década de 1980, de estudar o que se caracterizaria como uma verdadeira compreensão dos números, das relações numéricas, de seu poder e da sua utilidade na resolução das mais diversas situações-problema. Surge, então, a ideia do Sentido do Número como a convergência das capacidades de planejar, inferir, monitorar e interpretar cálculos aritméticos e, ainda, de perceber como os números são afetados pelas operações que lhes são aplicadas.

Segundo Cebola (2002, p. 226),

[...] o sentido do número pode ainda definir-se como sendo a compreensão genérica que cada pessoa tem dos números e das operações. Esta compreensão inclui não só a capacidade, mas também a tendência que se possui para desenvolver estratégias úteis que envolvam números e operações como um meio de comunicação, processamento e interpretação de informação, na resolução de problemas.

Nesse aspecto, o Sentido do Número se torna algo pessoal, desenvolvido de formas diferentes nas diversas individualidades no processo de construção do seu conhecimento. Com a intenção de articular uma estrutura específica, capaz de organizar e relacionar alguns componentes comumente aceitos como manifestações do Sentido do Número, McIntosh, Reys e Reys (apud PIERCE, 2001, p. 23) propõem um modelo, reproduzido a seguir, na tabela 1, para caracterização básica do Sentido do Número.

**Tabela 1.** Estrutura para considerar o Sentido do Número

Componentes-chave	Compreensões	Exemplos importantes
1. Conhecimento e Facilidade com NÚMEROS	1.1 Sentido e ordenação dos números	1.1.1 Valor posicional 1.1.2 Relação entre tipos de números 1.1.3 Ordenação dos vários tipos de número
	1.2 Múltiplas representações dos números	1.2.1 Gráfica/simbólica 1.2.2 Formas numéricas equivalentes (incluindo decomposição/recomposição)
	1.3 Sentido de magnitude relativa e absoluta dos números	1.2.3 Comparação entre marcas de referência 1.3.1 Comparando a um referencial físico 1.3.2 Comparando a um referencial matemático
	1.4 Sistema de comparação	1.4.1 Matemático 1.4.2 Pessoal
2. Conhecimento e facilidade com OPERAÇÕES	2.1 Compreensão do efeito das operações	2.1.1 Operando com números inteiros 2.1.2 Operando com frações/decimais
	2.2 Compreensão das propriedades matemáticas	2.2.1 Comutatividade
		2.2.2 Associatividade
		2.2.3 Distributividade
		2.2.4 Identidades
		2.2.5 Inversos
2.3 Compreensão das relações entre operações	2.3.1 Adição/multiplicação 2.3.2 Subtração/divisão 2.3.3 Adição/subtração 2.3.4 Multiplicação/divisão	
3. Aplicação do conhecimento e facilidade com os números e operações em AJUSTES COMPUTACIONAIS	3.1 Compreensão das relações entre o contexto do problema e o cálculo necessário	3.1.1 Reconhecer dados exatos ou aproximados 3.1.2 Ter a consciência de que soluções podem ser exatas ou aproximadas
	3.2 Conscientização de que existem múltiplas estratégias	3.2.1 Habilidade de criar e/ou inventar estratégias
		3.2.2 Habilidade de aplicar diferentes estratégias
		3.2.3 Habilidade de selecionar estratégias eficientes
	3.3 Inclinação para utilizar um método e/ou representação eficiente	3.3.1 Facilidade em vários métodos (mental, calculadora, papel e lápis)
		3.3.2 Facilidade para escolher número(s) eficiente(s)
	3.4 Inclinação para revisar, por sensibilidade, dados e resultados	3.4.1 Reconhecer a razoabilidade de dados
		3.4.2 Reconhecer a razoabilidade de cálculos

**Fonte:** Pierce (2001, p. 23)

Os autores afirmam, entretanto, que o quadro apresentado não é uma lista completa de todos os aspectos possíveis do Sentido do Número, mas uma ferramenta que identifica componentes observáveis importantes e os agrupa de acordo com temas comuns.

## Sentido do Símbolo

A partir da ideia de Sentido do Número, surge a indagação acerca da existência de seu paralelo em álgebra. Destaca-se, então, a importância de um estudo sobre o

Sentido do Símbolo, considerando-se, principalmente, o fato de que, segundo Arcavi (1994), muitos alunos, mesmo após anos de incursão algébrica, constroem pouco significado sobre os símbolos literais. Apesar de desenvolverem a capacidade de manejar técnicas algébricas, costumeiramente, não conseguem identificar a álgebra como uma ferramenta para a compreensão, expressão e comunicação de generalidades, com o objetivo de estabelecer conexões e formular argumentos matemáticos.

Em um passado não muito distante, a proficiência em rotinas matemáticas manipulativas era a grande perspectiva no ensino de Matemática. Entretanto, de acordo com Fey (1990), a evolução tecnológica envolvendo computadores e calculadoras capazes de construir gráficos, trabalhar com manipulações simbólicas e, até mesmo, com operações envolvendo matrizes, sugere algumas novas possibilidades curriculares. Segundo o autor, “estudantes do Ensino Médio podem lidar com questões sobre variáveis, funções e relações expressas em linguagem algébrica muito antes de dominar as regras de manipulação dessas expressões”. (FEY, 1990, p. 64).

Pierce (2001) destaca, entretanto, que a correta manipulação algébrica e os cálculos ainda são fundamentais para a evolução para um nível mais sofisticado de Matemática e afirma que o uso de tecnologias no processo de construção do conhecimento matemático não significa que as máquinas resolverão os problemas espontânea e isoladamente. Nesse sentido, de acordo com Fey (1990, p. 79),

Mesmo se as máquinas assumirem a maior parte da computação, ainda será importante para os seus usuários planejar corretamente as operações e interpretar com inteligência os resultados. O planejamento de cálculos requer a compreensão do significado das operações – das características das ações que correspondem a várias operações aritméticas. A interpretação dos resultados exige o julgamento sobre a probabilidade do dado de saída da máquina estar correto ou de que um erro possa ter sido cometido na entrada dos dados, na escolha das operações, ou no desempenho da máquina.

O autor propõe, então, a ideia do Sentido do Símbolo, fundamentado na perspectiva de desenvolver com os alunos, além das tradicionais capacidades acerca de conceitos e resolução de problemas, habilidades exigidas para se trabalhar de forma efetiva com expressões simbólicas e operações algébricas. A importância da construção do Sentido do Símbolo baseia-se na exigência de um olhar crítico dos estudantes frente às operações realizadas, tanto por computadores como por calculadoras sofisticadas, que realizam, além de cálculos aritméticos, manipulações algébricas. Aceitando todos os dados de saída das máquinas, pode-se homologar, por exemplo, a construção do gráfico de uma

função como  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ , que é simplificada para  $f(x) = x - 2$ , sem restrição de domínio e a verificação da descontinuidade em  $x = -2$ .

Arcavi (1994) transcende a relação do Sentido do Símbolo com as novas tecnologias e, apesar de evitar definir formalmente a expressão, propõe um conjunto de comportamentos que, na sua visão, demonstra a presença do Sentido do Símbolo e que consolida um objetivo desejável para a Educação Matemática. Segundo o autor,

A partir de exemplos reunidos, emerge um amplo espectro de interessantes formas de compreensão dos significados. Uma destilação do núcleo do que observei me levou a propor uma definição de “sentido dos símbolos”. Uma definição desse tipo pode passar a ser um meio para captar a ideia, refiná-la e convertê-la em operativa, seja como um marco para investigar a aprendizagem (de álgebra) ou como uma ferramenta para desenhar o ensinar, ou para ambos. Portanto, a definição, longe de ser fixa e estrita, é mais bem uma ferramenta de trabalho para estimular novas reflexões. (ARCAVI, 2007, p. 1).

Nesse contexto, Arcavi (2007) destaca o Sentido do Símbolo como uma apreciação, uma compreensão, um instinto complexo e multifacetado em relação aos símbolos e propõe o seguinte conjunto de comportamentos que, na sua concepção, caracterizam a existência do Sentido do Símbolo:

- a) ter uma compreensão sobre o poder dos símbolos, tendo-os sempre presentes e disponíveis para refletir criticamente sobre quando podem e devem ser utilizados para indicar relações, generalizações e provas que, de outra forma, estariam escondidas, invisíveis;
- b) ter o sentimento de quando os símbolos devem ser preteridos, seja por uma representação mais adequada à situação envolvida, seja para encontrar uma solução mais elegante ao problema proposto;
- c) ir além da manipulação algébrica, complementando-a com a leitura dos significados das representações simbólicas envolvidas na resolução de um problema;
- d) ter a consciência de que informações verbais ou gráficas, necessárias para a evolução da resolução de um problema, podem ser expressas algebricamente e ter, também, a habilidade de construir a expressão algébrica desejada dentro das condições apresentadas;
- e) ter a habilidade de escolher uma representação simbólica para um problema e, se necessário, ter a capacidade reconhecer a incorreção da opção e de buscar uma representação mais adequada;
- f) perceber a necessidade constante de buscar significados nos símbolos e nas manipulações algébricas no processo de resolução de um problema e compará-los com a expectativa criada intuitivamente para o problema;
- g) e perceber que os símbolos podem desempenhar papéis diferentes em diferentes contextos e construir, assim, uma noção dessas diferenças.

Arcavi (1994) afirma, porém, que, apesar de a ideia de uma lista de comportamentos capazes de indicar a presença do Sentido do Símbolo ser tentadora, essa está longe de ser exaustiva e de contemplar todas as possibilidades de expressão da presença desse sentido. Novos comportamentos e habilidades podem complementar essa ideia e uma definição satisfatória do Sentido do Símbolo deve se pautar pela união de ideias filosóficas e teóricas, com detalhadas observações da prática de resolução de problemas.

## Sentido do Gráfico

No processo de ensino e aprendizagem de Matemática, o recurso gráfico é de distinta importância. Com efeito, cotidianamente surgem situações nas quais esse tipo de representação se faz presente, seja em questões expostas por meio de gráficos já construídos, seja através de sua utilização em situações-problema difíceis de serem resolvidas ou comunicadas através de outras representações e que são simplificadas por essa visualização alternativa.

Segundo Arcavi (1999), a visualização está presente de forma muito efetiva na vida do ser humano atual, uma vez que as informações são transmitidas, em sua maioria, visualmente e que a tecnologia desenvolve e possibilita comunicação essencialmente visual. Nesse sentido, considerando que o estudante se insere fortemente nesse contexto, a visualização tem um papel importante na formação matemática, principalmente, quando a solução visual de um problema possibilita ao aluno a construção de relações entre conceitos e significados que, em uma abordagem estritamente algébrica, não são construídas.

Considerando-se a importância da visualização no processo de construção do conhecimento matemático, destaca-se o papel central da representação gráfica, que permite a percepção e a visualização de uma ampla gama de dados, assim como a possibilidade de se olhar além desses dados, realizando-se interpretações e inferindo outras informações.

A compreensão de um gráfico, porém, não é um processo simples. Diferentemente do que normalmente se pensa, esse não está relacionado apenas à sua leitura e interpretação, pois vai além e chega ao ideal de construir gráficos, entender a relação existente entre os dados utilizados e inferir comportamentos. Nesse contexto, segundo Kramarski (2004), a construção é muito diferente da interpretação. Enquanto a interpretação se fundamenta na reação do estudante, a construção de um gráfico requer o desenvolvimento de ideias que geralmente estão implícitas.

De acordo com Friel et al. (2001, p. 129),

Em geral, a compreensão de informação escrita ou simbólica envolve três tipos de comportamentos que parecem estar relacionados à compreensão gráfica, translação, interpretação e extrapolação/interpolação. Translação requer a mudança da forma de comunicação. [...] Interpretação

requer um rearranjo de material e a separação dos fatores importantes dos menos importantes. [...] Extrapolação e interpolação, consideradas a extensão da interpretação, requerem declarar não apenas a essência da comunicação, mas também identificar algumas de suas consequências. No trabalho com gráficos, pode-se extrapolar ou interpolar notando-se tendências percebidas através dos dados ou especificando implicações.

A compreensão de gráficos, portanto, envolve a capacidade de ler e interpretar gráficos já construídos, de considerar o processo de sua construção a partir dos dados expostos e, ainda, a habilidade de construí-los a partir de outras representações que se apresentem ou da interpretação de dados propostos. Segundo Friel et al. (2001), são identificados três níveis principais de habilidades na compreensão de gráficos:

- ler os dados: baseado na capacidade de ler os dados e informações diretamente do gráfico, compreendendo as convenções do seu desenho;
- ler entre os dados: caracterizado pela habilidade de encontrar relações e manipular, através de comparações, as informações contidas no gráfico;
- ler além dos dados: baseado na capacidade de generalizar, predizer, ou identificar tendências e relacionar as informações do gráfico com o contexto da situação dada.

Nesse sentido, os autores propõem a ideia de Sentido do Gráfico como um arranjo de comportamentos envolvendo a leitura, descrição, interpretação, análise e extrapolação de dados dos gráficos. Descrevem, ainda, que o Sentido do Gráfico se desenvolve, gradualmente, na criação de gráficos, na utilização de gráficos já disponíveis em uma variedade de contextos e problemas que necessitam da compreensão de dados e no trabalho com gráficos além do limite da sua construção ou da simples extração de dados.

## MATERIAIS E MÉTODOS

A pesquisa aqui exposta possui cunho qualitativo, pois se baseia na interpretação e compreensão das teorias (ALVES-MAZZOTTI, 1999) apresentadas por Raymond Duval e pelo grupo de estudos de Psicologia da Educação Matemática. Mais especificamente, trata-se de um tipo de estudo documental ou bibliográfico, definido por Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 103) como metanálise e caracterizado como:

[...] uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos.

Alguns autores também se referem à metanálise como uma "revisão sistemática" que, "assim como outros tipos de estudo de revisão, é uma forma de pes-

quisa que utiliza como fonte de dados a literatura sobre determinado tema” (SAMPAIO; MANCINI, 2007, p. 84). É nesse sentido que Dario Fiorentini e componentes de seu grupo de pesquisa têm empregado o termo. Passos et al. (2006, p. 209) concebem a metanálise como:

[...] uma modalidade de pesquisa que objetiva desenvolver uma revisão sistemática de estudos já realizados em torno de um mesmo tema ou problema de pesquisa, fazendo uma análise crítica dos mesmos com o intuito de extrair deles, mediante contraste e inter-relacionamento, outros resultados e sínteses.

O termo “metanálise” é utilizado, portanto, para caracterizar este estudo, visto que foi feita uma análise das concepções e conceitos relativos à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, bem como de ideias apresentadas por investigadores do grupo de Psicologia da Educação Matemática, objetivando, a partir dessa análise, construir novas concepções e uma nova abordagem para o ensino de funções e suas representações.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Dos estudos realizados emerge a importância do desenvolvimento das habilidades inerentes a cada uma das representações e também da habilidade de transitar entre elas, realizando constantes conversões, como fundamentais para uma construção sólida do conceito de função e, por consequência, do pensamento funcional. Enquanto a conversão não figurar como prática comum na matemática escolar, a possibilidade de compreensão de conceitos como o de função e a resolução de problemas mais sofisticados envolvendo esse domínio são possivelmente inalcançáveis. Com essa percepção da importância das ideias de Duval, as certezas sobre a caracterização de compreensões, principalmente sobre os registros de representação algébrico e gráfico, transformam-se.

Caracteriza-se, então, um campo de convergência entre as ideias das duas vertentes investigadas. Para ocorrer um trânsito frequente entre as diversas representações, há a necessidade de se construir o sentido dessas representações. Estudando as representações algébricas e explorando seus significados, as implicações de suas articulações e o que representam, o estudante pode perceber a álgebra como ferramenta para resolução de problemas e generalizações e não apenas como um somatório de técnicas sem relação com a realidade e outros conteúdos.

Da mesma forma, surge, como fundamental para uma construção sólida do conceito de função, o desenvolvimento do Sentido do Gráfico. Esse processo de interação com a representação gráfica é gradual e leva o aluno a extrapolar a simples construção de gráficos e leitura de dados a partir de um gráfico dado. Surge, assim, a oportunidade de o aluno visualizar relações de dependência entre as variáveis envolvidas em uma determinada situação, estudando a influência de cada

uma delas no comportamento da outra e de visualizar generalizações para relações funcionais estabelecidas.

Pode-se afirmar, portanto, que um estudo adequado sobre o conceito de função e suas implicações matemáticas deve se pautar, primeiramente, pelas teorias do Sentido das Representações, explorando a construção do Sentido do Símbolo e do Sentido do Gráfico, para, a seguir, introduzir a ideia de função como um objeto matemático abstrato, possível de ser visualizado por meio de diversas representações.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dessa discussão, apresenta-se uma situação-problema considerada oportuna para explorar os conceitos de Sentido do Símbolo, Sentido do Gráfico e também a prática da conversão, destacada por Duval na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Não se trata de um modelo, que deve ser repetido necessariamente da mesma forma, mas de uma sugestão que pode ser estudada e adaptada à realidade de cada sala de aula, de cada turma, respeitando sempre as diferenças e individualidades.

*Dois pessoas deslocam-se em um campo, em uma planície, e suas trajetórias distintas são dadas por meio dos pontos  $(x, \text{sen}(2x))$  e  $(x, 2^{-x})$ , para  $0 \leq x \leq 12\pi$ . Analise os gráficos das trajetórias, verifique se as pessoas se encontram e, se for o caso, quantas vezes isso acontece.*

O problema proposto apresenta aos alunos uma situação que, em uma primeira leitura, talvez não lhes pareça estar relacionada ao conceito de função. Uma análise mais criteriosa, entretanto, leva à conclusão de que as trajetórias das duas partículas são dadas por funções de  $x$ . O professor pode, então, a partir de discussões, levar os alunos à compreensão de que as partículas se movem seguindo as funções  $f(x) = \text{sen}(2x)$  e  $g(x) = 2^{-x}$  respectivamente.

Essa interação entre estudantes, professor e a situação proposta, culminando com escrita das trajetórias por meio de funções, possibilita a prática do tratamento. Esse tratamento também explora e incentiva o desenvolvimento de Sentido do Símbolo, pois possibilita ao aluno ir além da simples obtenção e manipulação da informação proposta, proporcionando a leitura do significado dos símbolos apresentados para a conclusão de que podem ser representados de uma forma diferente que, inclusive, pode facilitar a resolução da situação-problema.

Definidas as trajetórias das partículas como funções, surge a necessidade da construção gráfica para responder às questões. A transformação de  $f$  e  $g$ , do registro de representação algébrico para o registro de representação gráfico, exige a habilidade definida por Duval como conversão e destacada pelo autor como condição fundamental para a compreensão matemática.



Nesse processo, destaca-se a importância do Sentido do Gráfico, uma vez que as construções dessas representações se fundamentam, necessariamente, na consciência da relação existente entre as variáveis envolvidas e no contexto em que estão sendo utilizadas. Para a construção adequada dos gráficos das funções destacadas, há também a necessidade de inferir o padrão de comportamento de cada representação. É necessário, por exemplo, discutir o período da função

$f(x) = \text{sen}(2x)$ , uma vez que a variável é multiplicada por uma constante. Além disso, para garantir que haja intersecção dos gráficos, deve-se analisar o fato de a função exponencial  $g(x) = 2^{-x}$  ser monótona e

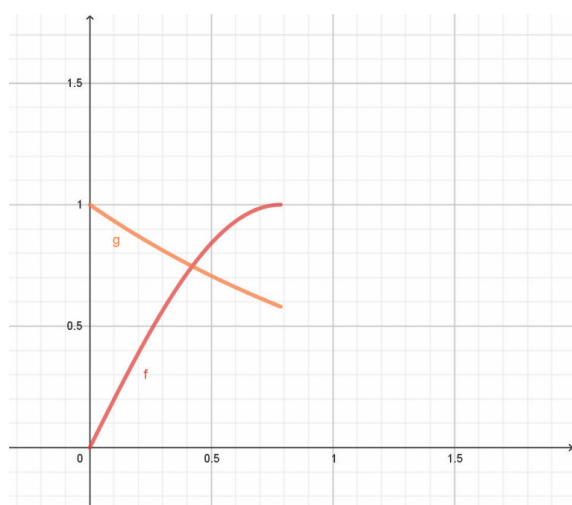
decrecente e que, para  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , seus valores pertencem ao intervalo  $\left[2^{-\frac{\pi}{4}}, 1\right]$ . Dessa forma, sendo a função

$f(x) = \text{sen}(2x)$  crescente em  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , seus valores percorrem o intervalo  $[0, 1]$ , e, portanto, haverá pelo menos uma intersecção dos gráficos nesse intervalo.

Feitos todos os tratamentos e conversões, exploradas as habilidades inerentes ao Sentido do Símbolo e ao Sentido do Gráfico, culminando com a construção dos gráficos das funções  $f$  e  $g$ , há, ainda, a necessidade de sua interpretação. Primeiramente, deve-se observar que a situação se restringe a valores de  $x$  pertencentes ao intervalo dado  $[0, 12\pi]$ . Depois, deve-se inferir um padrão de comportamento envolvendo as duas representações, para concluir quantos são os pontos de intersecção. Novamente, já com a construção dos gráficos finalizada, há a necessidade do Sentido do Gráfico para analisar o comportamento das funções no

intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  estudado, conforme a figura 3.

**Figura 3.** Gráfico representando as trajetórias das pessoas deslocando-se no campo



Fonte: BUENO, R. W. S.; VIALI, L. (2019)

Ilustrada a abrangência da questão proposta e das situações que surgem na sua resolução, acredita-se que fica caracterizada a importância de integrar esse tipo de atividade ao cotidiano escolar. Trabalhando-se com problemas com essas características, criam-se oportunidades para que os alunos percebam a importância da conversão e dos sentidos das representações. Dessa forma, além de deixar transparecer a importância dessas práticas, fomenta-se a construção do pensamento matemático e deixa-se de lado a visão de que a Matemática restringe-se a manipulações sucessivas, normalmente algébricas, sem sentido e significado para o estudante.

## REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A matemática na educação básica**. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, 1999.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O planejamento de pesquisas qualitativas. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 1999. p. 107-203.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. **Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, n. 44, p. 59-75, 2007.

ARCAVI, A. Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. **For the Learning of Mathematics**, [S.l.], v.14, n. 3, p. 24-35, nov. 1994.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1999. Cuernavaca, Mexico. **Proceedings** [...]. Cuernavaca: PME, 1999. p. 55-80.

BRAGA, C. **Função: a alma do ensino da matemática**. São Paulo: Annablume: FAPESP, 2006.

CEBOLA, G. Do número ao sentido do número. **ResearchGate**, [S.l.], p. 223-239, jan. 2002. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/228987631\\_Do\\_numero\\_ao\\_sentido\\_do\\_numero](https://www.researchgate.net/publication/228987631_Do_numero_ao_sentido_do_numero)> Acesso em: 06 ago. 2019.

D'AMBRÓSIO, U. **Transdisciplinaridade**. São Paulo: Palas Athena, 1997.

D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da matemática**. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, [S.l.], v. 61, n. 1-2, p. 103-131, fev. 2006.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking: basic issue for learning. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1999, Cuernavaca, México. **Proceedings** [...]. Cuernavaca: PME, 1999. p.3-26.

ELIA, I.; SPYROU, P. How students conceive function: a triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. **The Montana Mathematics Enthusiast**, Missoula, v. 3, n. 2, p. 256-272, 2006.

FALCÃO, J. T. da R. **Psicologia da educação matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

FEY, J. T. Quantity. In: STEEN, L. A. (Ed.). **On the shoulders of giants**: new approaches to numeracy. Washington: National Academies Press, 1990. p. 61-94.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FRIEL, S. N.; CURCIO, F. R.; BRIGHT, G. W. Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. **Journal for Research in Mathematics Education**, [S.l.], v. 32, n. 2, p. 124-158, 2001.

KRAMARSKI, B. Making sense of graphs: does metacognitive instruction make a difference on students' mathematical conceptions and alternative conceptions? **Learning and Instruction**, [S.l.], v. 14, n. 6, p. 593-619, dez. 2004.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M.; FIORENTINI, D.; MISKULIN, R. G. S.; GRANDO, R. C.; GAMA, R. P.; MEGID, M. A. B. A.; FREITAS, M. T. M.; MELO, M. V. de. Desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática: uma meta-análise de estudos brasileiros. **Quadrante**, Lisboa, v. 15, n. 1-2, p. 193-219, 2006.

PIERCE, R. U. **An exploration of algebraic insight and effective use of computer algebra systems**. 2001. Tese (Doutorado em Filosofia) – University of Melbourne, Australia, 2001.

SAMPAIO, R. F.; MANCINI, M. C. Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. **Revista Brasileira de Fisioterapia**, São Carlos, v. 11, n. 1, p. 83-89, jan./fev. 2007.