INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO TRIÂNGULO MINEIRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
htttp://editora.iftm.edu.br/index.php/inova

ISSN 2447-4924 (Impressa)
ISSN 2447-598X (Digital)

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (CDI) NO ENSINO DA FÍSICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM ESTUDO

Antonio Alberto de Sousa Dias[1]

RESUMO: Este artigo se propõe a analisar a inserção do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no Ensino Médio, auxiliada pela utilização do programa computacional Geogebra. Com isso, os conceitos de limite, que são apresentados de forma simples, predominantemente visuais e relacionados a definições e problemas, ficam menos abstratos e adquirem outro sentido, tornando as aulas mais leves e interessantes. Tal apresentação ocorrerá por meio de gráficos de funções e análise de seu comportamento para posterior aplicação na resolução de problemas de Matemática e Física. Assim, o uso de ferramentas e tecnologias apropriadas oportuniza aos estudantes a ampliação de sua percepção sobre conceitos matemáticos e físicos e, ao mesmo tempo, favorece a aquisição dos mesmos. Desse modo, como a resolução de problemas passa a ser mais mecânica com o emprego do cálculo, o professor pode enfatizar uma abordagem mais conceitual da Física, em particular, facilitando a compreensão de seus fenômenos, otimizando o ensino e a aprendizagem.

Palavras-chave: Software Geogebra. Cálculo Diferencial e Integral. Noção de Limite. Ensino de Matemática e Física.

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS (DIC) ON PHYSICS EDUCATION IN BASIC EDUCATION - A STUDY

ABSTRACT: This paper proposes to analyze the insertion of the Differential and Integral Calculus (CDI) in basic education, aided by the use of the Geogebra computational program. So, the concepts of limits, which are presented in a simple predominantly visual way and related to definitions and problems, become less abstract and take on other meaning, making classes lighter and more interesting. Such presentation will occur through function charts and analysis of their behavior for later application in solving problems of Mathematics and Physics. Thus, the use of appropriate tools and technologies allows students to broaden their perception of mathematical and physical concepts and, at the same time, favor their acquisition. Thus, as problem resolution becomes more mechanical with the use of calculus, the teacher can emphasize a more conceptual approach to physics, in particular, by facilitating the understanding of its phenomena, optimizing teaching and learning.

Keywords: Software Geogebra. Differential and integral calculus. Notion of Limit. Teaching Mathematics and Physics.

1 Professor do EBTT Mestrado em Matemática pelo PROFMAT na UFTM. - Instituto Federal do Triângulo Mineiro IFTM, *Campus* Uberaba. antoniosousa@iftm.edu.br

INTRODUÇÃO

No atual contexto escolar, presencia-se o baixo rendimento dos alunos em Matemática e Física, principalmente na Educação Básica, comprovando-se a existência de dificuldades na aprendizagem e, evidentemente, no ensino dessas disciplinas. Visando eliminá-las, é imprescindível pesquisar e desenvolver ferramentas que amenizem o problema, obtendo-se, assim, melhor desempenho dos estudantes. Desse modo, a inserção do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no ensino da Física do Ensino Médio, auxiliada pela utilização do programa computacional Geogebra, visa traçar uma perspectiva e um caminho por meio da tecnologia que auxiliem na construção do saber.

A presente proposta visa apresentar os conceitos do cálculo de forma simples, predominantemente visuais e relacionados a definições e problemas, os quais ficam menos abstratos e adquirem outro sentido, tornando as aulas mais leves e interessantes. Tal apresentação ocorrerá por meio de gráficos de funções e análise de seu comportamento, para posterior aplicação na resolução de problemas.

Através de discussões e reflexões ocorridas na formação acadêmica e no exercício do magistério, percebeu-se a importância de se introduzir esse estudo no Ensino Médio, com enfoque no ensino de Física e Matemática. A frequência no mestrado profissional em Matemática também contribuiu para a sua implantação, visando principalmente compreender as dificuldades de aprendizagem da Matemática e o que isso acarreta no ensino de outras ciências, em especial, a Física. Cabe ressaltar que o presente artigo é parte do estudo desenvolvido durante o Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, o qual teve seu término em julho de 2016.

Em muitas situações, deparamo-nos com alunos que, mesmo após muito estudo, confundem os conceitos das grandezas físicas. Por exemplo, quando se estuda a queda dos corpos em pequenas altitudes, onde a aceleração da gravidade pode ser considerada constante. Mesmo ao se propor situações em que a resistência do ar possa ser desprezada, é comum alguns alunos afirmarem que, nesse movimento, os corpos caem cada vez com maior aceleração, claramente confundindo os conceitos de velocidade e aceleração.

Como entender que, nesses movimentos, um corpo que cai a partir do repouso de uma altura de 20m atinge o solo com velocidade de 20m/s, após 2s de queda, enquanto outro que cai da altura de 5m, também a partir do repouso, atinge o solo após 1s, com velocidade de 10 m/s? Na queda livre, enquanto a velocidade aumenta linearmente com o tempo, o espaço percorrido aumenta com o quadrado do tempo decorrido.

A ideia de velocidade como medida da rapidez com que varia o espaço percorrido em função do tempo e a aceleração como medida da rapidez com que varia a velocidade de um corpo em função do tempo, certamente contribui para a compreensão e distinção desses conceitos e, destacamos o uso do CDI, em que a definição de limites e derivadas é fundamental. Isso vai ao encontro da proposta de Spina (2002) de se utilizar as ideias do CDI como elemento facilitador da compreensão e unificador dos atuais conteúdos desenvolvidos no Ensino Básico.

O CDI também contribui na determinação do espaço percorrido por um móvel quando sua velocidade sofre ou não variações, já que os alunos frequentemente afirmam erroneamente que um corpo que teve sua velocidade alterada de 0 a 10 m/s em 1s percorreu 10m. O mesmo ocorre com a variação de velocidade em movimentos com aceleração constante ou não.

Há movimentos nos quais a aceleração não é constante, como quando um corpo apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito comprime inicialmente uma mola contra uma parede e é liberado. A mola impulsiona o corpo que adquire um movimento retilíneo com uma aceleração que decresce linearmente e a velocidade aumenta segundo uma função quadrática com a diminuição da deformação da mola, até o instante em que o corpo se desprende da mesma. Se o corpo for preso à mola e esta presa à parede, após ser liberado o corpo passa a oscilar num movimento retilíneo de vai e vem – Movimento Harmônico Simples (MHS), em que a aceleração varia constantemente de intensidade e, periodicamente, de sentido. Nesse caso, a posição, a velocidade e a aceleração dos movimentos são descritos em função do tempo, por funções trigonométricas, o que aumenta significativamente as dificuldades de compreensão do conteúdo por parte dos alunos.

Compreendemos que, no Ensino Básico, a falta de pré-requisitos da Matemática gera desinteresse por parte dos alunos e dificulta a aprendizagem sobre os fenômenos físicos. Nessa direção, trazemos uma proposta de abordagem que utiliza o CDI no Ensino Básico de maneira a auxiliar na aprendizagem da Física, com a finalidade de construir os conhecimentos, por meios mais sólidos, sobre cinemática, dinâmica, funções etc. Outro aspecto a ser destacado é que, ao se utilizar ferramentas e tecnologias apropriadas, oportunizar-se-á aos estudantes ampliar sua percepção sobre conceitos matemáticos e físicos e, ao mesmo tempo, favorecer-se-á a aquisição dos mesmos. Desse modo, como a resolução de problemas passa a ser mais mecânica com o emprego do cálculo, o professor pode enfatizar uma abordagem mais conceitual da Física, facilitando a compreensão de seus fenômenos, otimizando o ensino e a aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

I – O Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Básico

A Matemática apresenta muitos campos de investigação e de aplicações práticas, basta observar que estamos em constante movimento e cada minuto vivido é diferente do anterior; portanto, nada é estático. Assim, encontramos aplicabilidade do cálculo em nossas vidas e experiências que permitem simular situações reais, prever, generalizar e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio matemático, em todas as áreas do saber, dentre elas a Física (SPINA, 2002).

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), o Ensino Médio pode ser considerado a "etapa final da educação básica" (Art.36) e concorre para a formação da identidade do aluno. Durante este período, a aprendizagem das Ciências da Natureza, diferentemente do que é desenvolvido no Ensino Fundamental, deve permitir a obtenção e construção de formas de pensamento mais abstratas e ressignificadas, em que a Matemática tem um papel fundamental, permitindo compreender e utilizar conhecimentos científicos, seja para explicar o funcionamento do mundo ou para avaliar, planejar e executar ações de com intervenções na realidade (LDB).

Santos (2006) afirma que, de acordo com o proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), o currículo do Ensino Médio deve permitir aos alunos o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, de forma multidisciplinar, preparando-o para a vida e também auxiliando na continuação dos estudos em níveis superiores. Segundo esse autor, parte significativa dos alunos conclui a Educação Básica com dificuldade para realizar operações com números reais, interpretar tabelas e gráficos e descrever fenômenos físicos que, em geral, necessitam da Matemática básica para sua melhor compreensão. Os resultados das avaliações institucionais do Governo Federal, como Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica (SAEB) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) comprovam isso.

Sabemos, também, que, na proposta curricular para o Ensino da Matemática, publicada em 1992, o CDI desaparece. Contudo, "apesar da não obrigatoriedade curricular, alguns livros continuaram e continuam mantendo noções de cálculo como um capítulo destinado ao ensino no último ano" (SPINA, 2002, p.81).

Para Spina (2002), a introdução de conceitos do CDI no Ensino Médio justifica-se se atender a dois objetivos interligados:

a) motivar o estudo de conteúdos "clássicos" do Ensino Médio tais como: funções, geometria analítica, logaritmos, trigonometria e outros; e
b) mostrar que a Matemática oferece ferramentas para solucionar problemas concretos (p.81).

Nessa direção, destacamos a importância do ensino do CDI na Educação Básica, a partir de abordagens que viabilizem a aprendizagem e, assim, possam contribuir para atenuar as dificuldades de aprendizagem. Consideramos ainda que, para compreender esses procedimentos estudados em Cálculo, o aluno deva ter alguns conhecimentos básicos de Matemática. Corroborando, Lopes (1999) afirma que:

> O diagnóstico sistemático de modelos permite prever, calcular, aperfeiçoar, medir, analisar o desempenho de experiências, além de estimar, proceder a análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico e humanístico dos diversos países (p. 913).

Sobre a apresentação do CDI no Ensino Médio (EM), Ávila (2006), em um artigo publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM - 21), sugere que o conteúdo de Derivada seja apresentado de forma simples e modesta: "o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções" (p.7). O estudo das funções pode ser executado integrado à geometria analítica, limites e derivadas. O autor pontua que, atualmente, esses conceitos são estudados separadamente: funções na primeira série do EM e os demais conteúdos citados, na terceira série do EM.

Ávila (2006) recomenda que, ao discutir gráficos no Ensino Fundamental (EF), o professor introduza o estudo sobre a equação da reta, particularmente a que passa pela origem do plano cartesiano, associada à ideia de proporcionalidade entre grandezas e regra de três, trabalhando coeficiente angular e declividade positiva e negativa.

A partir dessa ideia, na primeira série do EM, Ávila (2006) argumenta que apresentar a equação da reta na forma tradicional se torna mais fácil, apenas mostrando como se translada o gráfico ao longo do eixo *y*. Acréscimos e decréscimos também podem ser trabalhados e o coeficiente angular como sendo a razão $\Delta y/\Delta x$', dando um primeiro passo em direção ao estudo de Limite e Derivada. Isso pode ser apresentado com a função horária do Movimento Uniforme (MU), cujo gráfico é uma reta inclinada, já que se trata de uma função de primeiro grau ($S = S0 + v.t$, na qual S0 e S são as posições inicial e final sobre a trajetória e $v = \Delta S/\Delta t$', a velocidade do movimento).

Diante do panorama apresentado, destacamos que a inserção do CDI no Ensino Básico deva ser realizada por meio de uma abordagem adequada para que a compreensão seja relativamente simples e auxilie na aprendizagem de diversos conceitos matemáticos e físicos. Outro aspecto a ser ressaltado é saber aproveitar a habilidade dos educandos contemporâneos com as novas tecnologias, pois o computador faz parte do cotidiano e do lazer deles, é um hábito que tais estudantes trazem consigo para a escola. É neste sentido que optou-se pelo software Geogebra como um facilitador dos ensinamentos da Física e sobre o qual discorreremos no próximo tópico.

II – O software GeoGebra como ferramenta facilitadora

O *software* educativo de matemática dinâmica GeoGebra, idealizado e criado por Markus Hohenwarterodar, na universidade de Salzburg, reúne GEOmetria, álGEBRA e cálculo. É um *software* de fácil aquisição, visto que está disponível gratuitamente em vários idiomas e para seu funcionamento em qualquer micro depende da instalação da linguagem Java, pois esta é a plataforma em que este programa funciona.

Por ser um sistema dinâmico de geometria, ele permite ao usuário fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, bem como funções e mudá-los dinamicamente, além do que equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente.

Assim, o GeoGebra tem a habilidade de tratar das variáveis para números, vetores e pontos, permitir achar derivadas e integrais de funções e oferecer comandos como Raízes ou Extremos.

Dessa forma, a proposta de abordagem do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Básico de maneira a auxiliar na aprendizagem da Física teve como escolha a ferramenta do software de Geometria Dinâmica, o GeoGebra, por possibilitar por meio de construção e análise gráfica, trabalhar concepções intuitivas de velocidade e aceleração média e instantânea para formalizar conceitos de taxa de variação média e variação instantânea de funções. A abordagem sugerida auxilia na compreensão de fenômenos físicos, pois é por meio do CDI que definimos as grandezas envolvidas na Cinemática.

A seguir, apresentaremos uma fundamentação teórica sobre Limite, intermediada por sugestões de atividades que o professor da Educação Básica pode apresentar e demonstrar a aplicação desses conceitos. Essas atividades são direcionadas para aplicações nos conteúdos da Matemática e da Física (cinemática) selecionados, caracterizando a interdisciplinaridade.

Concepções intuitivas de velocidade e aceleração médias e instantâneas servem para formalizar conceitos de taxa de variação média e variação instantânea de funções de uma forma geral.

A derivação de funções constantes e polinomiais de primeiro e segundo grau (simples e de fácil compreensão) será utilizada na descrição e análise dos movimentos uniforme e uniformemente variado. Já a derivação das funções trigonométricas seno e cosseno (não tão simples) será utilizada nas funções que caracterizam o MHS, no qual é aplicada a regra da cadeia. Os alunos devem descrever a aceleração como a taxa de variação no tempo da velocidade e a velocidade como taxa de variação no tempo do espaço percorrido, ou seja, a aceleração como derivada temporal da velocidade e esta como derivada temporal do espaço.

Na representação gráfica das funções que caracterizam os movimentos, que é apresentada ao longo desse texto, o cálculo de áreas com o eixo OX, num intervalo definido do domínio, permite obter a integral definida nesse intervalo. No gráfico da aceleração, essa integral representa a variação da velocidade e no gráfico da velocidade, a variação do espaço.

III – Limite

Na introdução do conceito de limite de uma função num ponto, que pode existir ou não, é fundamental identificarmos o domínio da mesma, estudar seu comportamento e identificar possíveis restrições nas proximidades do referido ponto. A partir daí, pode-se concluir sobre a existência ou não do mesmo.

Para a determinação do domínio de uma função, em alguns casos, é importante estar ciente das propriedades que possuem os quocientes. Por exemplo, os quocientes da forma x/0, com x ≠ 0, não existem, pois se um número a = x/0, teríamos que a.0 = x , o que é impossível já que a.0 = 0 e por hipótese x ≠ 0. Por outro lado, quando x = 0, dizemos que o quociente 0/0, é uma indeterminação, uma vez que se a = 0/0, a relação a.0 = 0 é satisfeita para qualquer número real a. Finalmente, o quociente 0/x, com x ≠ 0, é sempre zero, pois a relação x.0 = 0 é verificada para qualquer número real x. É importante frisar que estes quocientes nem sempre são encontrados.

A fim de clarificar o exposto, por meio de exemplos, daremos uma noção intuitiva do conceito de limite.

Considere a função afim f(x) = 2x + 1, definida para qualquer x ∊ ℝ, onde ℝ é o domínio de f, neste caso. Analisemos o comportamento da função f nas proximidades do ponto x = 0, mas diferente de zero, vide Tabela 1.

Tabela 1: Valores de f(x) = 2*x* + 1 quando *x* se aproxima de zero.

Aproximação pela esquerda		Aproximação pela direita	
x	f(x)	x	f(x)
-0.2	0.6	0.2	1.4
-0.1	0.8	0.1	1.2
-0.05	0.9	0.05	1.1
-0.03	0.96	0.03	1.06
-0.01	0.98	0.01	1.02

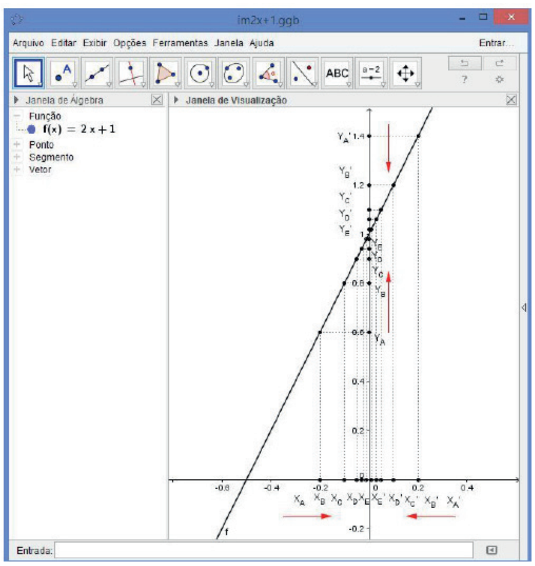
Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Observa-se que, à medida que x assume valores cada vez mais próximos de 0 (maiores ou menores), os valores da função f(x) se aproximam do valor 1. Disto, decorre que podemos tornar os valores de f(x) tão próximos de 1 quanto quisermos tornando os valores de x suficientemente próximo de 0. Expressamos isso dizendo que “o limite da função f(x) = 2x + 1 quando x tende a 0 é igual a 1”. A representação desse limite é dada por

$$\lim_{x \to 0} 2x + 1 = 1$$

O gráfico a seguir mostra o comportamento da função f(x) = 2x + 1 nas proximidades de x = 0.

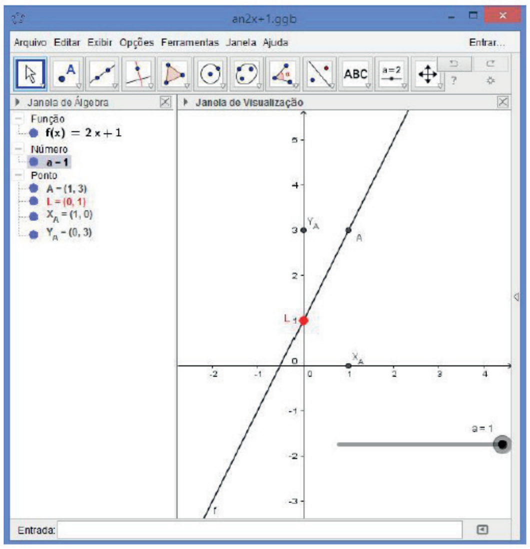
Figura 1: Gráfico de f(x) = 2x + 1



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Com alguns recursos do Geogebra é possível mostrar, através de “animações”, o comportamento de uma função nas proximidades de um ponto e, assim, enfatizar a noção de limite para alunos da educação básica. Vejamos como esta animação poder ser realizada para a função f(x) = 2x + 1 estudada acima, na Figura 2. Para isto, é preciso selecionar no programa Geogebra a função controle deslizante a, variando num intervalo que contenha 0, por exemplo, no intervalo de [-1,1]. Depois digitar as entradas f(a)=2a+1, P=(a,f(a)), X=(a,0) e Y=(0,f(a)). Para dar mais foco ao movimento dos pontos, sugerimos criar os segmentos que ligam X a P e P a Y. Assim, quando movimentarmos os valores de ***a***, os pontos X, P e Y se movimentarão na tela do programa. Então, quando tomarmos os valores de a próximos de 0, veremos que os valores de x se aproximarão de 0, no eixo x, e os valores de y automaticamente se aproximarão de 1, no eixo y.

Figura 2: Animação sobre o gráfico de f (x) = 2x + 1



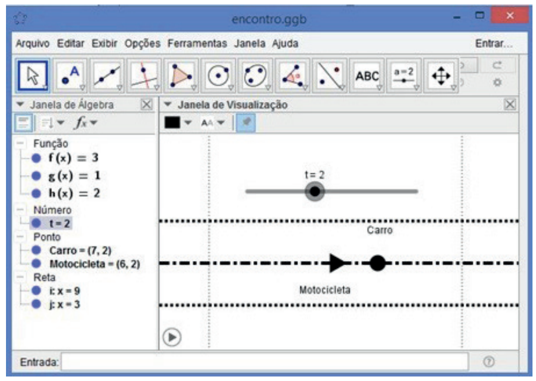
Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Como o ponto x = 0 pertence ao domínio da função f(x) = 2*x* + 1, e o limite da função f(x) no ponto x = 0 pode ser obtido, nesse caso especificamente, substituindo diretamente x por 0 na função (f(0) = 1). Enfatizando o carácter interdisciplinar proposto nesse trabalho, o professor pode explorar esse exemplo em que ***a*** representa a velocidade e o limite é a posição inicial, no instante t = 0, desconsiderando portanto, os instantes negativos. No Geogebra pode-se restringir o gráfico da função apenas para um domínio ID = $\mathbb{R}^+$.

Pode-se também pedir aos alunos que façam inferências sobre o problema do encontro de dois móveis (Fig. 3), no qual, a partir das posições iniciais e das velocidades constantes deles sobre uma mesma trajetória, pode-se determinar o instante e a posição de encontro dos mesmos. Além disso, os movimentos podem ser no mesmo sentido ou em sentidos contrários, bastando que nesse último sejam adotadas velocidades com sinais contrários.

O primeiro passo é criar o controle deslizante a, renomeado para t, para indicar os instantes, no intervalo [0,10], por exemplo. A seguir, escolhem-se valores para as posições iniciais e para as velocidades dos móveis. As entradas dos pontos que caracterizam os movimentos podem ser S_1=(S_{01}+v_1t,y) e S_2=(S_{02}+v_2t,y), com os valores previamente escolhidos e ***y***, uma constante escolhida e comum ao dois movimentos. S_1 e S_2 podem ser renomeados para carro, moto etc, com o mesmo procedimento adotado nos controles deslizantes. Na janela de visualização do programa, os eixos Ox e Oy podem ser ocultados, o que melhora a visualização da imagem. Depois, é só habilitar a animação no controle deslizante.

Figura 3. Encontro de dois móveis



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Posteriormente, o encontro pode ser determinado algebricamente através das funções que caracterizam os movimentos, $S1=S_{01}+v_1t$ e $S_2=S_{02}+v_2t$, fazendo $S_1 = S_2$, ou seja, $S_{01}+v_1t = S_{02}+v_2t$.

Agora, analisemos o comportamento de uma função próximo a um ponto que não pertence a seu domínio.

Considere a função f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$. Observe que esta função não está definida no ponto x = 1, pois há uma indeterminação nesse ponto (f(1) = 0/0). Logo seu domínio é dado por ID = $\mathbb{R}$ – {1}. Vejamos na Tabela 2 o comportamento de f(x) em pontos próximos a x = 1.

Tabela 2: Valores de f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$ quando x se aproxima de 1.

Aproximação pela esquerda		Aproximação pela direita	
x	f(x)	x	f(x)
0.5	1.5	1.5	2.5
0.6	1.6	1,4	2.4
0.7	1.7	1.3	2.3
0.8	1.8	1.2	2.2
0.9	1.9	1.1	2.1

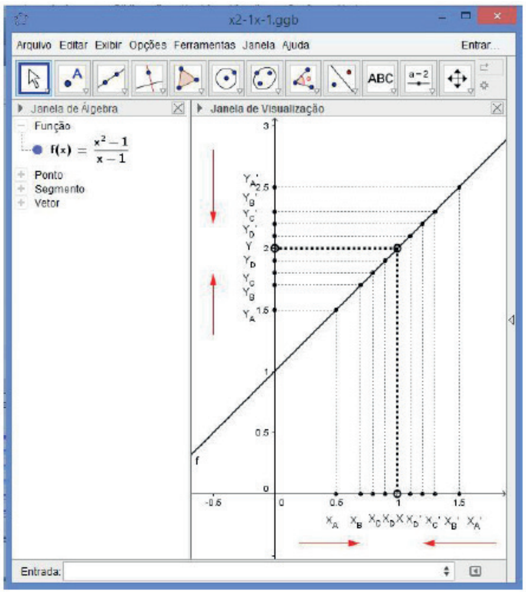
Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Pode-se observar que, à medida que os valores de x ϵ $\mathbb{R}$ se aproximam de 1, tanto pela esquerda quanto pela direita, os valores de f(x) se aproximam de 2 (veja também Figura 4). Então, dizemos que o limite da função f(x) = (x^2-1)/(x-1) quando x tende a 1 é igual a 2, e a representação desses limites é dada por

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

O gráfico a seguir mostra o comportamento da função f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$ nas proximidades de x = 1.

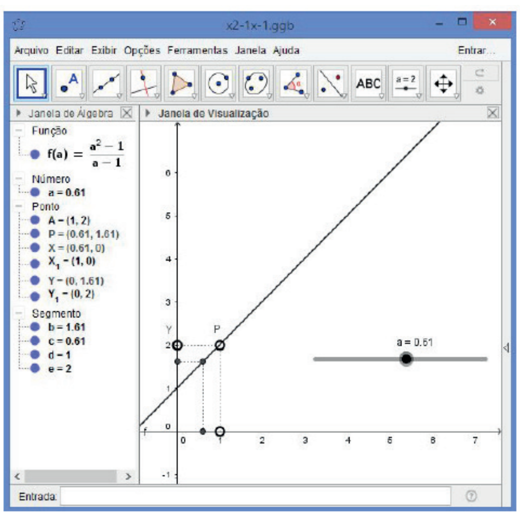
Figura 4: Gráfico de f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

De maneira análoga ao primeiro exemplo, pode-se ilustrar este processo, utilizando as ferramentas do programa Geogebra. Selecionamos no programa a função controle deslizante a, variando agora num intervalo que contenha 1, por exemplo, no intervalo de [-1,2]. Depois digitamos as entradas f(a) = (a^2-1)/(a-1), P = (a, f(a)), X = (a, 0) e Y = (0, f(a)). Como a função f(a) não está definida em 1, sugerimos destacar o ponto a = 1 no gráfico com uma bola aberta, simbolizando que naquele ponto há um "buraco" \ no eixo x. Para isto, basta criar os pontos A=(1,0); B=(0,2) e C=(1,2) e depois, clicando com o botão direito do mouse, selecionar propriedades, depois estilo, e assim escolher a representação dos pontos A, B e C, como mostra a Figura 5.

Figura 5: Animação sobre o gráfico de f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Então, no deslizante, quando tomarmos os valores de a próximos de 1, veremos que os valores de x se aproximarão de 1, no eixo x, e os valores de y se aproximarão de 2, no eixo y. Entretanto, quando colocamos a = 1, teremos na parte esquerda da tela do programa que os valores de Y e P aparecerão como indefinidos, uma vez que a função não está definida em x = 1.

Algebricamente, também pode-se resolver este limite da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

Simplificando (x – 1), tem-se:

$$\lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

Conclui-se, a partir destes exemplos, que para encontrarmos o limite de uma função em um dado ponto não é necessário que a função dada esteja definida neste ponto. O que interessa é saber o comportamento da função nas proximidades do ponto dado.

Dessa forma, por definição, pode-se dizer que o limite de uma função f(x) é igual a L, quando x tende a x_0, e denotamos por

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

se pudermos tornar os valores de f(x) arbitrariamente próximos de L à medida que os valores de x são tomados suficientemente próximos de x_0.

A fim de melhor compreender, apresentar-se-á um caso especial sobre o conceito de limite. Considere a função:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

cujo domínio é dado por ID = ℝ - {1}, já que 1/0 é uma indeterminação.

Analisemos, primeiramente, o comportamento de f(x) nas proximidades do ponto x = 1, conforme a Tabela 3.

Tabela 3: Valores de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ quando x se aproxima de 1.

Aproximação pela esquerda		Aproximação pela direita	
x	f(x)	x	f(x)
0.2	-1.25	2	1
0.5	-2	1.5	2
0.75	-4	1.25	4
0.8	-5	1.2	5
0.9	-10	1.1	10
0.99	-100	1.01	100

Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Observe que, fazendo os valores de x se aproximarem de 1 pela esquerda, eles de f(x) decrescem rapidamente tendendo a outros infinitamente pequenos, aos quais expressaremos este comportamento por

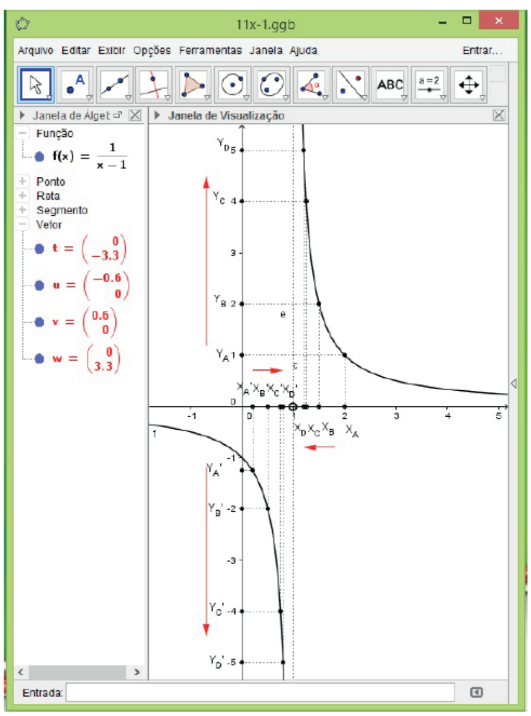
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

em que o símbolo -∞, neste caso, indica apenas que f(x) está tomando valores cada vez menores à medida que x se aproxima de 1 pela esquerda. Do mesmo modo, fazendo os valores de x se aproximarem de 1 pela direita, vemos que os valores de f(x) crescem rapidamente para valores infinitamente grandes, aos quais também representamos por

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

sendo que o símbolo +∞, neste caso, indica apenas que f(x) está tomando valores cada vez maiores à medida que f(x) se aproxima de 1 pela direita. O gráfico a seguir mostra o comportamento da função f(x) nas proximidades de x = 1.

Figura 6: Gráfico de f(x) = $\frac{1}{x-1}$



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Neste caso, dizemos que o limite de f(x) quando *x* tende a 1 não existe.

Por outro lado, façamos sobre a mesma função f(x) = $\frac{1}{x-1}$ uma outra análise, para observarmos o comportamento da mesma quando os valores de *x* tendem a ser infinitamente pequenos, e, analogamente, quando os valores de x tendem a ser infinitamente grandes, conforme a Tabela 4.

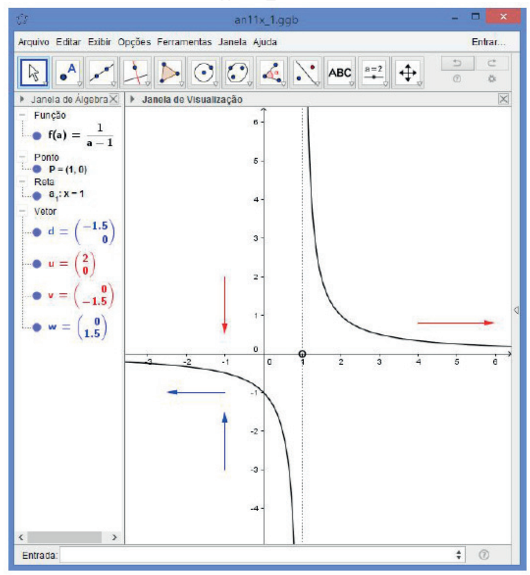
Tabela 4: Valores de f(x) = $\frac{1}{x-1}$ quando x se aproxima de -∞ (à esquerda) e de +∞ (à direita).

Valores de x tendendo a $-\infty$		Valores de x tendendo a $+\infty$	
x	f(x)	x	f(x)
-1	-0.5	2	1
-4	-0.2	5	0.25
-9	-0.1	11	0.1
-99	-0.01	101	0.01
-999	-0.001	1001	0.01
-9999	-0.0001	10001	0.0001

Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Nota-se que à medida que os valores de x se tornam cada vez menores, temos que os valores de f(x) se aproximam cada vez mais do valor 0 e, quando os valores de *x* são tomados cada vez maiores, vemos também que valores de f(x) também se aproximam de 0, conforme mostra a Figura 7.

Figura 7: Gráfico de f(x) = $\frac{1}{x-1}$



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Estes dois comportamentos podem ser representados das seguintes formas:

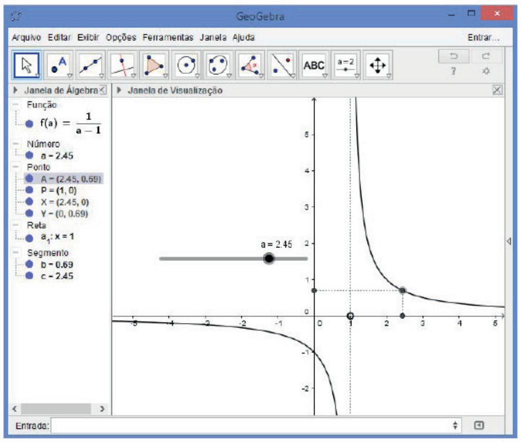
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

nas quais os símbolos -∞ indicam que os valores de x são tomados suficientemente pequenos, e os símbolos +∞ indicam que os valores de x são tomados suficientemente grandes.

A simulação do comportamento dessa função, em todos os casos aqui apresentados, podem ser ilustrados por meio de animação no Geogebra, utilizando o controle deslizante a, variando, por exemplo, de -1000 a 1000, digitando as entradas f(a)=1/(a-1), P = (a, f(a)), X = (a, 0) e Y = (0, f(a)), e enfatizando o comportamento da função quando x se aproxima de 1 pela esquerda e pela direita, e também quando x assume valores cada vez maiores e cada vez menores.

Figura 8: Animação sobre o gráfico de f(x) =$\dfrac{1}{x-1}$



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

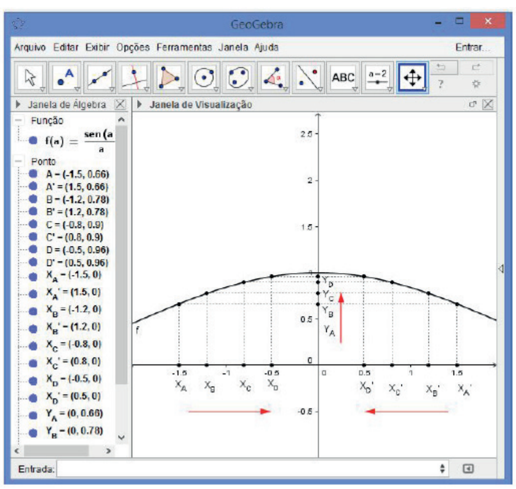
Há que se destacar também as propriedades operatórias dos limites, a saber:

1. O limite da soma é a soma dos limites;
2. O limite do produto é o produto dos limites;
3. O limite do quociente é o quociente dos limites.

Contudo, para o estudo do Cálculo Diferencial, é de suma importância o estudo de dois limites:

a) Trigonométrico fundamental que pode ser apresentado geometricamente, por meio do programa Geogebra, observando o comportamento da função $\mathrm{f(x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ nas proximidades do ponto x = 0, como mostra a figura 9.

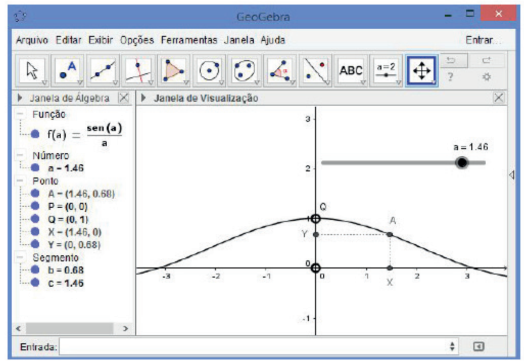
Figura 9: Gráfico de $\mathrm{f(x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

A animação do comportamento da função f(x)=$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ nas proximidades x = 0 pode ser feita com a criação de controle deslizante ***a*** no intervalo [-2,2] e com as entradas X=(a,0), Y=(0,f(a)) e P=(a,f(a)), conforme mostra a figura 10.

Figura 10: Animação do Gráfico de f(x)=$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

b) Exponencial Fundamental

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

e

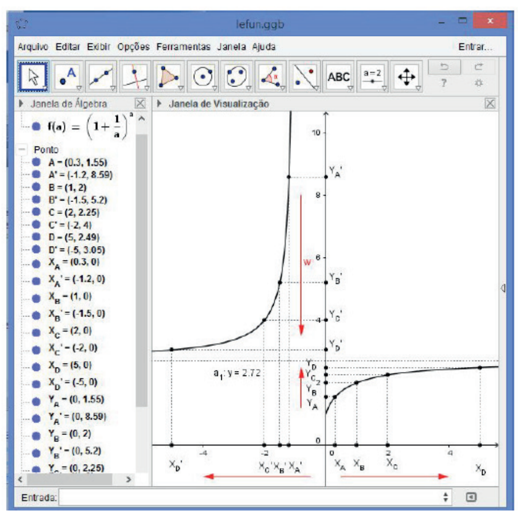
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

Nesse limite, o número irracional e = 2,71828.... é denominado número de Euler (Leonhard Euler/1707 - 1783), que é a base dos logaritmos naturais.

A figura 11 mostra o comportamento da função $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, com x tendendo a +∞ e a -∞.

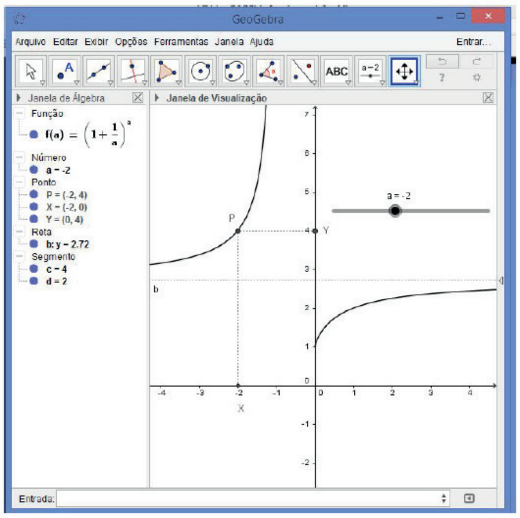
A veracidade de tais limites também pode ser ilustrada, através do Geogebra, analisando o comportamento da função $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, quando x assume valores suficientemente grandes e pequenos.

Figura 11: Gráfico de $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Figura12: Animação sobre o gráfico de $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$



Fonte: DIAS A. A. S. (2016)

Problemas relativos ao Movimento Uniformemente Variado (MUV) podem ser solucionados com regras de derivação de funções polinomiais. Como se trata de alunos da Educação Básica, essas regras são apresentadas sem preocupação com as demonstrações. A partir da função horária das posições $S = S_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}$ pode-se obter a função da velocidade $v = v_o + a.t$; por derivação e derivando novamente, tem-se a aceleração do movimento pois,

$$v = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ e } a = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

CONCLUSÃO

A proposta deste artigo foi apresentar uma alternativa ao ensino de Matemática e Física na Educação Básica, com a finalidade de se melhorar os índices de desempenho dos alunos nessas disciplinas, devido, principalmente, ao caráter interdisciplinar das atividades desenvolvidas. A interdisciplinaridade permite ao professor responder aos porquês de se estudar matemática, frequentemente questionamento por parte dos alunos, e será utilizada como ferramenta na resolução de problemas.

No entanto, para se obter o melhor aprendizado da Física, seus conceitos devem ser priorizados e observar que a Matemática aparece apenas como ferramenta para permitir mais abstração, quando se trabalha com fórmulas para a quantização de grandezas físicas, melhorando a compreensão de fenômenos. Deve-se entender também que frequentes erros de cálculos não implicam necessariamente numa interpretação errônea de conceitos físicos.

A utilização de animações com o Programa Geogebra permite ao professor analisar o comportamento de funções num ponto, introduzindo a ideia de Limite de uma função de forma simples e interessante e com uma consequente interação dos alunos. Assim, conceitos podem ser entendidos sem que se utilize uma quantidade grande de fórmulas, reclamação constante por parte dos alunos e que acarreta o desinteresse dos mesmos. Nesse caminho, se o docente buscar estratégias que relacionem os conteúdos às situações mais concretas, a partir das quais os alunos realizem uma reflexão e criem sentido, acredita-se que um dos obstáculos ao estudo de Física será vencido.

Outro aspecto para qual não se pode fechar os olhos é a necessidade de se investir na formação do profissional com vistas a refletir na qualidade do ensino de Física, pois ele deve, além de dominar os conceitos, perceber que, ao ampliar os métodos de ensino com a utilização de recursos, obterá mais eficácia aliando os saberes espontâneos aos científicos. Assim, esses recursos só alcançarão seu intento se os professores tiverem um bom preparo para utilizar tal metodologia nas formas de ensinar.

Portanto, uma proposta diferenciada para o ensino de Física aliada à experimentação e à visualização, utilizando-se de um recurso computacional, acredita-se que haverá boa aceitação pelos estudantes por ser um recurso dinâmico e repleto de aplicabilidade para os conceitos matemáticos. Acreditamos, também, que por meio de recursos tecnológicos conseguimos nos aproximar da realidade dos discentes, obtendo assim reversão do quadro de dificuldades que os estudantes apresentam em relação às disciplinas que envolvem cálculos, tanto para o Ensino Médio quanto para o Superior.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. Limites e derivadas no ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 60, p. 30-32,2006 http://www.rpm.org.br/cdrpm/60/8.htm. acesso em 28/05/2019.

ÁVILA, G. O ensino de cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, 18. 1991, p.1 http://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm acesso em 28/05/2019.

AZEVEDO, M. M.; KRAEMER, E. L.; CASTRO, T. B. Uma introdução do cálculo variacional no ensino da física. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, p. 214-233, 2015. https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14624/pdf acesso em 28/05/2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da República Federativa do Brasil]**, Brasília, DF, v. 134, n. 248, 23 dez. 1996.Seção I, p. 27834-27841.

DIAS, A. A. S, **Cálculo diferencial e integral (CDI) no ensino da Física na educação básica**. TCC do PROFMAT pela UFTM. 2016.

FRESCKI, F.B.; PIGATTO, P. Dificuldades na aprendizagem de cálculo diferencial e integral na educação tecnológica: proposta de um curso de nivelamento. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, 1, 2009, Ponta Grossa. **Anais**... Ponta Grossa: UTFPR , 2009. p. 910-917. <www.sinect.com.br/anais2009/artigos/.../Ensinodematematica_artigo6.pdf. acesso em 28/05/2019.

IEZZI, Gelson,“et al”. **Matemática**. São Paulo. V.2 e V.3. Atual. 1980.

KAPLAN, W. ; LEWIS, K. **Cálculo e álgebra linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. 462 p.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de cálculo da UFRGS. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n.26/27, p.123-146, jun./dez. 1999. https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n26_n27_Artigo05.pdf acesso em 28/05/2019.

PENTEADO, M.G. Redes de trabalho: expansão das possibilidades da informática na educação matemática da escola básica. In: BICUDO, M. A. V. ; BORBA, M.C. (Org.) **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, p. 283-295, 2004. <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/livro/infoacao.pdf>. acesso em 28/05/2019.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; WALKER, J. **Fundamentos de física I**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005. 292 p.

BUSSE, R. S. ; SOARES, F. S. . **O Cálculo Diferencial e Integral e o Ensino Médio**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática - IX ENEM, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. https://pt.slideshare.net/laercio181/po02944174789-t acesso em 28/05/2019.

SANTAROSA, M. C. P.; MOREIRA, M. A. O cálculo nas aulas de física na UFRGS: um estudo exploratório. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 16, n. 2, p. 317-351, 2011.

SANTAROSA, M. C. P. Os lugares da matemática na física e suas dificuldades contextuais: implicações para um sistema de ensino integrado. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 18, n. 1, p. 215-235, 2013.

SILVA, G.H.G, PENTEADO. M. G. **Geometria dinâmica na sala de aula: o desenvolvimento do futuro professor de matemática diante da imprevisibilidade** - Ciência & Educação (Bauru), 2013 https://www.redalyc.org/html/2510/251027945004/ acesso em 28/05/2019.

SPINA. C. O. C. **Modelagem matemática no processo de ensino aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio**. 2002. 117 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. 664p. v 1.

YAMAMOTO, K; FUKE, L. F. **Física para o ensino médio**. 3. ed. São Paulo: Saraiva , 2013. 448 p. 1. v